

I. Coefficients binomiaux

Définition : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$

On appelle **combinaison de k parmi n** , le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Propriétés : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

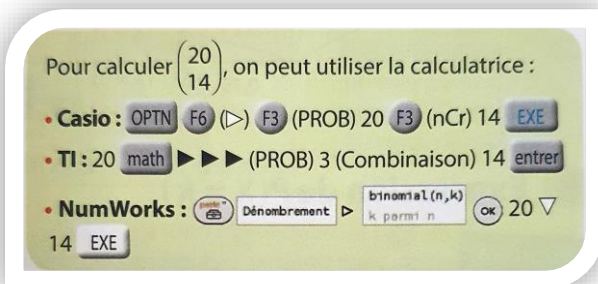
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Formule de Pascal : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Astuces : à la main et à l'oral

Avec la calculatrice :



Avec un tableur :

La fonction se nomme "**COMBIN**".

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit :
=COMBIN(25;24)

2) Triangle de Pascal

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

II. Application à la loi Binomiale

1) Probabilité d'une loi Binomiale à l'aide des coefficient binomiaux

Propriété : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .
On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, la loi de probabilité de X est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exercices : n° 54 et 53 page 207.

2) Espérance, variance et écart-type de la loi Binomiale

Propriété : Soit la variable aléatoire X qui suit la loi Binomiale de paramètres n et p .
On a : $E(X) = np$ $V(X) = np(1 - p)$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemples en revenant sur les exercices du DM

III. Loi géométrique

1) Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est égale à p .

On répète cette expérience jusqu'à obtenir le 1^{er} succès.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

Propriété :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .
Pour tout entier naturel k non nul, la loi de probabilité de X est :

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Exemple :

On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès qu'on obtient « pile », que l'on considère comme succès.

La probabilité d'obtenir pour la première fois « pile » au troisième lancer est égale à :

$P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ où X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.

2) Espérance

Propriété : Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors on a : $E(X) = \frac{1}{p}$

3) Loi géométrique par l'absence de mémoire

La loi géométrique est dite « sans mémoire » car la connaissance du résultat des k premières expériences ne modifie pas les probabilités pour les suivantes.

Par exemple, si on lance une pièce de monnaie et que l'on considère comme succès « obtenir pile », la probabilité d'obtenir un succès après le 15^e lancer sachant qu'on n'a pas obtenu de succès pour les 10 premiers lancers est égale à la probabilité d'obtenir un succès après le 5^e lancer.

Propriété de la loi sans mémoire : Soit la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique. Pour tous entiers n et k non nuls, on a : $P_{X>k}(X > n + k) = P(X > n)$.

➤ Exemple corrigé : Calculer une probabilité en utilisant la propriété de la loi sans mémoire

On considère que la probabilité qu'un couple donne naissance à un enfant gaucher est égale à 12 %.

Sachant qu'un couple a déjà un enfant droitier, quelle est la probabilité d'avoir un enfant gaucher à partir du 4^e enfant ?

On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'enfants jusqu'à la naissance du premier enfant gaucher.

X suit la loi géométrique de paramètre 0,12. En effet, la probabilité d'un succès (avoir un enfant gaucher) sur un enfant est égale à 0,12.

Sachant qu'un couple a déjà un enfant droitier ($X > 1$), la probabilité d'avoir un enfant gaucher à partir du 4^e enfant ($X > 3$), est :

$$\begin{aligned} P_{X>1}(X > 3) &= P_{X>1}(X > 2 + 1) \\ &= P(X > 2), \text{ d'après la loi sans mémoire.} \end{aligned}$$

Remarque :

Dans la formule, ce qui est à prendre en compte, c'est le **nombre d'expériences en plus**. Ainsi, la formule pourrait s'écrire de la façon suivante :

$$P_{X>a}(X > b) = P(X > b - a)$$

Sous cette forme, elle a l'avantage, d'être plus facile à retenir, une fois comprise. Si on en revient à l'exercice, on retrouve bien le résultat précédent :

$$P_{X>1}(X > 3) = P(X > 3 - 1) = P(X > 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - 0,12 \times 0,88^{1-1} - 0,12 \times 0,88^{2-1} \\ &= 1 - 0,12 - 0,12 \times 0,88 = 0,7744 \end{aligned}$$

Sachant qu'un couple a déjà un enfant droitier, la probabilité d'avoir un enfant gaucher à partir du 4^e enfant est égale à 77,44%.